УДК 517.392

И. В. Бойков, А. И. Бойкова

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦЕЛЫМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Построен и обоснован сплайн-коллокационный метод нулевого порядка для решения гиперсингулярных и полигиперсингулярных интегральных уравнений с нечетными сингулярностями целого порядка. Введено определение гиперсингулярных интегралов для функций, имеющих разрывы первого рода.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, полигиперсингулярные интегральные уравнения, сплайн-коллокационные методы.

Abstract. For solution of hypersingular integral equations and polyhypersingular integral equations with integer odd singularities offered zero-order spline-collocation methods. Introduced the definition of hypersingular integrals for functions with the first order breaks.

Keywords: hypersingular integral equations, polyhypersingular integral equations, spline-collocation methods.

Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений, зародившаяся в начале прошлого века в трудах Д. Гильберта и А. Пуанкаре, в течение последующих почти 100 лет переживает бурное развитие. По-видимому, это в первую очередь связано с многочисленными приложениями сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений и краевой задачи Римана в физике, механике и технике. Хорошо известен спектр применения теории сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в механике и технике: теория упругости и термоупругости, аэродинамика, электродинамика.

Не менее широки области применения краевой задачи Римана, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в физике: квантовая теория поля [1], теория близкого и дальнего взаимодействия [2], теория солитонов [3].

Однако решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в аналитическом виде возможно лишь в исключительных случаях и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. Подробное изложение численных методов решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений содержится в работах [4–15], в которых также имеется обширная библиография.

В работах [10, 11] предложен сплайн-коллокационный метод решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений и доказана его сходимость. Однако точность предложенного метода существенно зависит от классов функций, к которым принадлежат коэффициенты уравнения и точное решение. Поэтому представляет значительный интерес разработка более точных и удобных в практическом отношении методов решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений. Еще больший интерес представляет разработка численных методов решения полигиперсингулярных и многомерных сингулярных интегральных уравнений. Для приближенного решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений и полигиперсингулярных интегральных уравнений с сингулярностями четного порядка в [12, 14] предложен и обоснован сплайн-коллокационный метод нулевого порядка. В работе [14] также предложен и обоснован сплайн-коллокационный метод нулевого порядка для приближенного решения многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений с особенностями любого конечного порядка.

При этом остались неисследованными приближенные методы решения одномерных гиперсингулярных и полигиперсингулярных интегральных уравнений с особенностями нечетного порядка.

Данная статья посвящена построению и обоснованию сплайн-коллокационных методов решения одномерных гиперсингулярных и полигиперсингулярных интегральных уравнений с особенностями нечетного порядка.

Напомним определения гиперсингулярных интегралов.

Определение 1 [16]. Интеграл вида $\int\limits_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$ при целом p и $0<\alpha<1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла как предел при $x \to b$ суммы

$$\int\limits_a^x \frac{A(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что $A(x)$ имеет p производных в окрестности точки b. Здесь $B(x)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

1) рассматриваемый предел существует;

2) $B(x)$ имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x=b$.

Произвольный выбор $B(x)$ никак не влияет на значение получаемого предела: условие 1 определяет значения $(p-1)$ первых производных от $B(x)$ в точке b, так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b-x)^p$.

Определение 2 [17]. Интегралом $\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}$, $a<c<b$, в смысле главного значения Коши – Адамара будем называть следующий предел:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int\limits_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \int\limits_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}}\right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

Распространим определение интеграла Адамара на случай кусочно-непрерывных функций. Пусть функция $\varphi(t)$ определена во всех точках сегмента $[a,b]$, непрерывна всюду, за исключением точки c, где имеет разрыв первого рода. Пусть функция $\varphi(t)$ имеет непрерывные производные до p-го порядка в промежутках $[a,c)$, $(c,b]$, причем существуют левые и правые производные $\varphi^{(k)}(c\pm 0)$, $k=0,1,\ldots,p-1$.

Определение 3. Интеграл вида $\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}$ при целом p определяется как

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}=\lim_{\eta_1\downarrow 0}\left[\int\limits_a^{c-\eta_1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}-\frac{B_1(\eta_1)}{\eta_1^{p-1}}-B_2(\eta_1)\ln\eta_1\right]+$$

$$+\lim_{\eta_2\downarrow 0}\left[\int\limits_{c+\eta_2}^{b}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}-\frac{B_3(\eta_2)}{\eta_1^{p-1}}-B_4(\eta_2)\ln\eta_2\right], \qquad (1)$$

где $B_1(\eta)$, $B_3(\eta)$ – функции непрерывно дифференцируемые до $(p-1)$-го порядка в начале координат; $B_2(\eta)$, $B_4(\eta)$ – функции, удовлетворяющие условию Дини – Липшица в окрестности начала координат. На функции $B_i(\eta)$, $i=1,2,3,4,$ налагается условие, чтобы предел (1) существовал.

Нетрудно видеть, что если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывные левые и правые производные до $(p-1)$-го порядка в окрестности начала координат, то такой предел существует и не зависит от выбора функций $B_i(\eta)$, $i=1,2,3,4$.

Рассмотрим бигиперсингулярный интеграл

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^p\tau_2^p}, \qquad (2)$$

где p – целое число.

Определение 4 [18]. Интеграл (2) при целом p определяется как

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^p\tau_2^p}=$$

$$=\lim_{\eta\downarrow 0}\left[\int\int\limits_{\Omega\backslash G_\eta}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^p\tau_2^p}-\frac{B_1(\eta)}{\eta^{2p-2}}-\frac{B_2(\eta)}{\eta^{p-1}}\ln\eta-B_3(\eta)\ln^2\eta\right],$$

где $\Omega=[0,1]^2$, $G_\eta=([0,\eta]\times[0,1])\cup([0,1]\times[0,\eta])$, функция $B_1(\eta)$ имеет непрерывные производные до $(2p-2)$-го порядка в окрестности начала координат; функция $B_2(\eta)$ имеет непрерывные производные до $(p-1)$-го порядка в окрестности начала координат, причем производная $(p-1)$-го порядка от функции $B_2(\eta)$ удовлетворяет условию Дини – Липшица; функция $B_3(\eta)$ бесконечно малая относительно $\frac{1}{|\ln^2\eta|}$.

1. Гиперсингулярные интегральные уравнения с нечетной особенностью

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p} + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{3}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, $h(t,\tau)$ – непрерывные функции, $p = 2k+1$ ($k = 1, 2, \ldots$) – нечетное целое число. Будем считать, что $b(t) \neq 0$ при $t \in [-1,1]$.

Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t), \tag{4}$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, t \in \Delta_k, \\ 0, t \in [-1,1] \setminus \Delta_k, \end{cases}$$

$\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, N-2$, $\Delta_{N-1} = [t_{N-1}, 1]$,

$$t_k = -1 + 2k/N, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(t_k)\alpha_k + b(t_k)\sum_{l=0}^{N-1}{}' \alpha_l \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} +$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N-1} h(t_k, t_l)\alpha_l = f(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{5}$$

где $\sum_{l=0}^{N}{}'$ означает суммирование по $l \neq (k-2, k-1, k+1)$.

Обоснование разрешимости вычислительной схемы (5) будем проводить на основании теоремы Адамара об обратимости квадратных матриц [19].

Вычислим интеграл

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}.$$

Таким образом, при достаточно больших значениях N диагональные элементы матрицы A, описывающей левую часть системы уравнений (5), оцениваются неравенствами

$$|a_{kk}| = \left| a(t_k) + b(t_k) \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} + \frac{2}{N} h(t_k, t_k) \right| \geq$$

$$\geq |b(t_k)| \frac{N^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)} - |a(t_k)| - \frac{2}{N} |h(t_k, t_k)|, \tag{6}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1.$

Оценим сумму модулей недиагональных элементов k-й строки матрицы A. Очевидно, сумма модулей недиагональных элементов k-й строки матрицы A оценивается неравенством

$$\sum_{l=0}^{N-1}{}^{*} |a_{kl}| \leq |b(t_k)| \sum_{l=0}^{N-1}{}'' \left| \int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} \right| + 2H^*, \tag{7}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1.$

Здесь $H^* = \max\limits_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|$, $\sum\limits_{l=0}^{N-1}{}^{*}$ означает суммирование по $l \neq k$, $\sum\limits_{l=0}^{N-1}{}''$ означает суммирование по $l \neq (k-2, k-1, k, k+1)$.

Нетрудно видеть, что при достаточно больших значениях N и при $k \neq 0, 1, 2, N-3, N-2, N-1$

$$\sum_{l=k+2}^{N-1} \left| \int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} \right| = \left| \sum_{l=k+2}^{N-1} \int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} \right| = \left| \int\limits_{t_{k+2}}^{1} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{p-1} \left(\frac{N}{4} \right)^{p-1} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{(1-t_k)^{p-1}} = \frac{1}{p-1} \left(\frac{N}{4} \right)^{p-1} - \frac{1}{p-1} \left(\frac{N}{2N-2k} \right)^{p-1}; \tag{8}$$

$$\sum_{l=0}^{k-3} \left| \int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} \right| = \left| \sum_{l=0}^{k-3} \int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} \right| = \left| \int\limits_{-1}^{t_{k-2}} \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^p} \right| =$$

$$= \frac{1}{p-1} \left(\frac{N}{4} \right)^{p-1} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{(1+t_k)^{p-1}} = \frac{1}{p-1} \left(\frac{N}{4} \right)^{p-1} - \frac{1}{p-1} \left(\frac{N}{2k} \right)^{p-1}. \tag{9}$$

При $k = 0$ и при $k = N-1$ соответственно имеем

$$\sum_{l=2}^{N-1} \left| \int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^p} \right| = \frac{1}{p-1} \left(\frac{N}{4} \right)^{p-1} - \frac{1}{2^{p-1}(p-1)}; \tag{10}$$

$$\sum_{l=0}^{N-4}\left|\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-t_{N-1})^p}\right|=\left|\int_{-1}^{t_{N-3}}\frac{d\tau}{(\tau-t_{N-1})^p}\right|\le\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}-\frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}}. \quad (11)$$

Аналогичные оценки справедливы при $k=1,2,N-3,N-2$.

Из неравенств (7)–(11) следует, что сумма модулей недиагональных элементов матрицы A оценивается неравенством

$$\sum_{l=0}^{N-1}{}^{*}|a_{kl}|\le|b(t_k)|\left(\frac{2}{p-1}\right)\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}-$$

$$-\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2N-2k}\right)^{p-1}-\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2k}\right)^{p-1}+2H^*,\ k=3,\ldots,N-4; \quad (12)$$

$$\sum_{l=0}^{N-1}{}^{*}|a_{jl}|\le|b(t_0)|\left(\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}-\frac{1}{2^{p-1}(p-1)}\right)+2H^*,\ j=0,1,2; \quad (13)$$

$$\sum_{l=0}^{N-1}{}^{*}|a_{j,l}|\le|b(t_{N-1})|\left(\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}-\frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}}\right)+2H^*, \quad (14)$$

$j=N-3,N-2,N-1.$

Из сопоставления неравенств (6) и (9)–(14) следует, что если при всех k, $0\le k\le N-1$, выполняются неравенства

$$|b(t_k)|\frac{N^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)}-|a(t_k)|-\frac{2}{N}|h(t_k,t_k)|>|b(t_k)|\times$$

$$\times\left(\frac{2}{p-1}\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}-\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2N-2k}\right)^{p-1}-\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2k}\right)^{p-1}\right)+2H^*,3\le k\le N-4; \quad (15)$$

$$|b(t_j)|\frac{N^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)}-|a(t_j)|-\frac{2}{N}|h(t_j,t_j)|>$$

$$>|b(t_j)|\left(\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2^{p-1}(p-1)}\right)+2H^*,\ j=0,1,2; \quad (16)$$

$$|b(t_j)|\frac{N^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)}-|a(t_j)|-\frac{2}{N}|h(t_j,t_j)|>$$

$$>|b(t_j)|\left(\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}-\frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}}\right)+2H^*,\ j=N-3,N-2,N-1, \quad (17)$$

то система уравнений (5) однозначно разрешима.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: p – нечетное целое число, $b(t) \neq 0$ при $t \in [-1,1]$, при всех k, $0 \le k \le N-1$, выполняются неравенства (15)–(17), где $t_k = -1 + 2k/N$. Тогда система уравнений (5) однозначно разрешима.

2. Полигиперсингулярные интегральные уравнения

Рассмотрим бигиперсингулярное интегральное уравнение

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + b(t_1,t_2)\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau_1,t_2)}{(\tau_1-t_1)^p}d\tau_1 + c(t_1,t_2)\int_{-1}^{1} \frac{x(t_1,\tau_2)}{(\tau_2-t_2)^p}d\tau_2 +$$

$$+d(t_1,t_2)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p} = f(t_1,t_2) \qquad (18)$$

с непрерывными функциями $a(t_1,t_2)$, $b(t_1,t_2)$, $c(t_1,t_2)$, $d(t_1,t_2)$, $f(t_1,t_2)$. Будем считать, что функция $d(t_1,t_2) \neq 0$ при $(t_1,t_2) \in [-1,1]^2$, $p = 2l+1\ (l = 1, 2, ...)$.

При рассмотрении гиперсингулярных интегральных уравнений мы ограничиваемся двумерным случаем, так как из дальнейшего будет видно, что уравнения любой конечной размерности рассматриваются аналогично.

Распространение полученных ниже результатов на интегральные уравнения вида (18), включающие компактные операторы, не вызывает принципиальных затруднений.

Пусть N – целое число, $v_k = -1 + 2k/N$, $k = 0,1,\dots,N$, $\Delta_k = [v_k, v_{k+1})$, $k = 0,1,\dots,N-2$, $\Delta_{N-1} = [v_{N-1}, v_N)$, $\Delta_{k,l} = [v_k, v_{k+1}) \times [v_l, v_{l+1})$, $k,l = 0,1,\dots,$ $N-2$, $\Delta_{N-1,l} = [v_{N-1}, v_N] \times [v_l, v_{l+1})$, $l = 0,1,\dots,N-2$, $\Delta_{k,N-1} = [v_k, v_{k+1}) \times$ $\times [v_{N-1}, v_N]$, $k = 0,1,\dots,N-1$, $\Delta_{N-1,N-1} = [v_{N-1}, v_N] \times [v_{N-1}, v_N]$.

Приближенное решение уравнения (18) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_{N,N}(t_1,t_2) = \sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} \alpha_{k_1 k_2}\psi_{k_1 k_2}(t_1,t_2), \qquad (19)$$

где $\psi_{k_1 k_2}(t_1,t_2) = \begin{cases} 1, \text{если } (t_1,t_2) \in \Delta_{k_1 k_2}, \\ 0, \text{если } (t_1,t_2) \in [-1,1]^2 \setminus \Delta_{k_1 k_2}. \end{cases}$

Коэффициенты $\{\alpha_{k_1 k_2}\}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(v_{k_1}, v_{k_2})\alpha_{k_1 k_2} + b(v_{k_1}, v_{k_2})\sum_{l_1=0}^{N-1}{}' \alpha_{l_1 k_2}\int_{\Delta_{l_1}} \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - v_{k_1})^p} +$$

$$+c(v_{k_1},v_{k_2})\sum_{l_2=0}^{N-1}{}''\alpha_{k_1 l_2}\int\limits_{\Delta_{l_2}}\frac{d\tau_2}{(\tau_2-v_{k_2})^p}+d(v_{k_1},v_{k_2})\sum_{l_1=0}^{N-1}{}^*\sum_{l_2=0}^{N-1}{}^*\alpha_{l_1 l_2}\times$$

$$\times\int\limits_{\Delta_{l_1 l_2}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_{k_1})^p(\tau_2-v_{k_2})^p}=f(v_{k_1},v_{k_2}),\ k_1,k_2=0,1,\ldots,N-1. \qquad (20)$$

Здесь $\sum\limits_{l_1=0}^{N-1}{}'$ означает суммирование по $l_1\neq(k_1-1,k_1)$, $\sum\limits_{l_1=0}^{N-1}{}''$ означает суммирование по $l_2\neq(k_2-1,k_2)$, $\sum\limits_{l_1=0}^{N-1}{}^*\sum\limits_{l_2=0}^{N-1}{}^*$ означает суммирование по $l_1\neq k_1-2,k_1-1,k_1,k_1+1,l_2\neq k_2-2,k_2-1,k_2,k_2+1$.

Для доказательства однозначной разрешимости системы уравнений (20) воспользуемся теоремой Адамара об обратимости квадратных матриц.

Предварительно оценим снизу абсолютную величину интеграла

$$\int\limits_{\Delta_{k_1 k_2}}\int\frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_{k_1})^p(\tau_2-v_{k_2})^p}.$$

Очевидно,

$$\left|\int_0^{2/N}\int_0^{2/N}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^p\tau_2^p}\right|=\left|\lim_{\eta\downarrow 0}\left[\int_\eta^{2/N}\int_\eta^{2/N}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^p\tau_2^p}-\frac{B_1(\eta)}{\eta^{2p-2}}-\frac{B_2(\eta)}{\eta^{p-1}}\ln\eta-B_3(\eta)\ln^2\eta\right]\right|=$$

$$=\left|\lim_{\eta\downarrow 0}\left]\int_\eta^{2/N}\frac{d\tau_1}{\tau_1^p}\int_\eta^{2/N}\frac{d\tau_2}{\tau_2^p}-\frac{B_1(\eta)}{\eta^{2p-2}}-\frac{B_2(\eta)}{\eta^{p-1}}\ln\eta-B_3(\eta)\ln^2\eta\right]\right|\geq$$

$$\geq\frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{N}{2}\right)^{2p-2}. \qquad (21)$$

Обозначим через $A=\{a_{kl}\}$, $k,l=0,1,\ldots,N^2-1$, матрицу, описывающую левую часть системы уравнений (18).

Тогда диагональные элементы матрицы A оцениваются неравенствами

$$|a_{kk}|=\left|a(v_k,v_k)+b(v_k,v_k)\int\limits_{\Delta_k}\frac{d\tau}{(\tau-v_k)^p}+c(v_k,v_k)\int\limits_{\Delta_k}\frac{d\tau}{(\tau-v_k)^p}+\right.$$

$$\left.+d(v_k,v_k)\int\limits_{\Delta_{kk}}\int\frac{d\tau}{(\tau-v_k)^p(\tau-v_k)^p}\right|\geq|d(v_k,v_k)|\frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{N}{2}\right)^{2p-2}-|b(v_k,v_k)|\times$$

$$\times\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}-|c(v_k,v_k)|\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}-|a(v_k,v_k)|,\ k=0,1,\ldots,N^2-1. \quad (22)$$

Оценим сумму внедиагональных элементов в каждой строке матрицы A. Пусть $l=Ni+j,\ k=Ni_1+j_1,\ i,i_1=0,1,\ldots,N-1,\ j,j_1=0,1,\ldots,N.$

Сумма модулей внедиагональных элементов, расположенных в l-й строке матрицы A, оценивается неравенством

$$\sum_{k=0,k\neq l}^{N^2-1}|a_{lk}|\leq|b(v_i,v_j)|\sum_{j_1=0}^{N-1}{}'\left|\int\limits_{v_{j_1}}^{v_{j_1+1}}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-v_j)^p}\right|+|c(v_i,v_j)|\sum_{i_1=0}^{N-1}{}''\left|\int\limits_{v_{i_1}}^{v_{i_1+1}}\frac{d\tau_2}{(\tau_2-v_i)^p}\right|+$$

$$+|d(v_i,v_j)|\sum_{i_1=0}^{N-1}{}^*\sum_{j_1=0}^{N-1}{}^*\left|\int\limits_{v_{i_1}}^{v_{i_1+1}}\int\limits_{v_{j_1}}^{v_{j_1+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_j)^p(\tau_2-v_i)^p}\right|, \quad (23)$$

где $\sum\limits_{j_1=0}^{N-1}{}'$ означает суммирование по $j_1\neq(j-1,j)$; $\sum\limits_{i_1=0}^{N-1}{}''$ означает суммирование по $i_1\neq(i-1,i)$; $\sum\limits_{i_1=0}^{N-1}{}^*$ означает суммирование по $i_1\neq i-2,i-1,i,i+1$; $\sum\limits_{j_1=0}^{N-1}{}^*$ означает суммирование по $j_1\neq j-2,j-1,j,j+1.$

Продолжим оценку неравенства (23). Очевидно,

$$\sum_{k=0,k\neq l}^{N^2-1}|a_{kl}|\leq|b(v_i,v_j)|\left[\left|\int\limits_{-1}^{v_{j-1}}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-v_j)^p}\right|+\left|\int\limits_{v_{j+1}}^{1}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-v_j)^p}\right|\right]+$$

$$+|c(v_i,v_j)|\left[\left|\int\limits_{-1}^{v_{i-1}}\frac{d\tau_2}{(\tau_2-v_j)^p}\right|+\left|\int\limits_{v_{i+1}}^{1}\frac{d\tau_2}{(\tau_2-v_i)^p}\right|\right]+$$

$$+|d(v_i,v_j)|\left|\int\int\limits_{\Omega(v_i,v_j)}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_i)^p(\tau_2-v_j)^p}\right|, \quad (24)$$

где $\Omega(v_i,v_j)=\Omega\setminus([v_{i-3},v_{i+2};-1,1]\cup[-1,1;v_{j-3},v_{j+2}]),\ \Omega=[-1,1]^2.$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части формулы (24).

Очевидно, при $j\neq 0,N-1$:

$$|b(v_i,v_j)|\left[\left|\int_{-1}^{v_{j-1}}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-v_j)^p}\right|+\left|\int_{v_{j+1}}^{1}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-v_j)^p}\right|\right]\le$$

$$\le|b(v_i,v_j)|\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}\left[2+\left(\frac{-1}{j}\right)^{p-1}-\left(\frac{1}{N-j}\right)^{p-1}\right];$$

при $j=0$:

$$|b(v_i,v_0)|\left|\int_{v_1}^{1}\frac{d\tau}{(\tau_1-v_0)^p}\right|\le|b(v_i,v_0)|\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}\left(1-\left(\frac{1}{N}\right)^{p-1}\right)\le$$

$$\le|b(v_i,v_0)|\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}.$$

Аналогичная оценка справедлива и при $j=N-1$:

$$|b(v_i,v_{N-1})|\left|\int_{-1}^{v_{N-2}}\frac{d\tau}{(\tau_1-v_{N-1})^p}\right|\le|b(v_i,v_{N-1})|\frac{1}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}.$$

Из последних трех неравенств следует, что

$$r_1(i,j)\le|b(v_i,v_j)|\frac{3}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}. \tag{25}$$

Аналогичная оценка справедлива для второго слагаемого:

$$r_2(i,j)\le|c(v_i,v_j)|\frac{3}{p-1}\left(\frac{N}{2}\right)^{p-1}. \tag{26}$$

Приступим к оценке третьего слагаемого:

$$r_3(i,j)\le|d(v_i,v_j)|\left|\int\int_{\Omega\backslash G_0}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1)^p(\tau_2)^p}\right|\le 4\,|d(v_i,v_j)|\left|\int_{4/N}^{1}\int_{4/N}^{1}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1)^p(\tau_2)^p}\right|\le$$

$$\le 4\,|d(v_i,v_j)|\frac{1}{(p-1)^2}\left(\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}-1\right)^2. \tag{27}$$

Из неравенств (24)–(27) следует, что при достаточно больших значениях N и для любых $l=0,1,\ldots,N^2-1$

$$\sum_{k=0,k\ne l}^{N^2-1}|a_{lk}|\le 4D^*\frac{1}{(p-1)^2}\left(\left(\frac{N}{4}\right)^{p-1}-1\right)^2. \tag{28}$$

Из сопоставления неравенств (22) и (28) следует, что при достаточно больших N выполняются условия теоремы Адамара об однозначной разрешимости линейных систем уравнений. Отсюда следует однозначная разрешимость системы уравнений (20).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть уравнение (18) имеет единственное решение и справедливы неравенства $0 < D_* \leq |d(t,\tau)| < D^* < \infty$. Тогда система уравнений (20) однозначно разрешима.

Опишем изменения, которые нужно ввести в вычислительную схему (20) в предположении, что рассматривается гиперсингулярное интегральное уравнение (18), левая часть которого возмущена компактным оператором.

Рассмотрим уравнение

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + b(t_1,t_2)\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau_1,t_2)d\tau_1}{(\tau_1-t_1)^p} + c(t_1,t_2)\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(t_1,\tau_2)d\tau_2}{(\tau_2-t_2)^p} + d(t_1,t_2)\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^p(\tau_2-t_2)^p} + \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2). \quad (29)$$

Приближенное решение уравнения (29) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (19), коэффициенты $\{\alpha_{kl}\}$ которой находятся из системы уравнений

$$a(v_{k_1},v_{k_2})\alpha_{k_1k_2} + b(v_{k_1},v_{k_2})\sum_{l_1=0}^{N-1}{}' a_{l_1k_2}\int\limits_{\Delta_{l_1}}\frac{d\tau}{(\tau_1-v_{k_1})^p} + c(v_{k_1},v_{k_2})\sum_{l_2=0}^{N-1}{}'' \alpha_{k_1l_2}\times$$

$$\times\int\limits_{\Delta_{l_2}}\frac{d\tau_2}{(\tau_2-v_{k_2})^p} + d(v_{k_1},v_{k_2})\sum_{l_1=0}^{N-1}{}^{**}\sum_{l_2=0}^{N-1}{}^{**}\int\limits_{\Delta_{l_1l_2}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_{k_1})^p(\tau_2-v_{k_2})^p} +$$

$$+\frac{4}{N^2}\sum_{l_1=0}^{N-1}\sum_{l_2=0}^{N-1}h(v_{k_1},v_{k_2}v_{l_1},v_{l_2})\alpha_{l_1l_2} = f(v_{k_1},v_{k_2}),\ \ k_1,k_2 = 0,1,\ldots,N-1. \quad (30)$$

Здесь обозначения $\sum'$ и $\sum''$ совпадают с соответствующими обозначениями в формуле (20), а $\sum\limits_{l_i=0}^{N-1}{}^{**}$ означает суммирование по $l_i \neq (k_i-v, k_i-v+1,\ldots,k_i-1,k_i+1,\ldots,k_i+v-1)$, $i=1,2$.

В качестве параметра v выбирается наименьшее неотрицательное целое число такое, чтобы для системы уравнений (30) были бы выполнены условия теоремы Адамара об однозначной разрешимости систем линейных уравнений.

Список литературы

1. **Боголюбов, Н. Н.** Применение методов Н. И. Мусхелишвили в теории элементарных частиц / Н. Н. Боголюбов, В. А. Мещеряков, А. Н. Тавхелидзе // Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. – Тбилиси : Мецниереба. – 1971. – Т. 1. – С. 5–11.
2. **Браун, Дж. Е.** Нуклон-нуклонное взаимодействие / Дж. Е. Браун, Э. Д. Джексон. – М. : Атомиздат, 1975. – 248 с.
3. **Тахтаджян, Л. А.** Гамильтонов подход в теории солитонов / Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. – М. : Наука, 1986. – 528 с.
4. **Иванов, В. В.** Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев : Наукова думка, 1968. – 287 с.
5. **Гохберг, И. Ц.** Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
6. **Michlin, S. G.** Singulare Integraloperatoren / S. G. Michlin, S. Prossdorf. – Berlin : Acad. Verl., 1980. – 514 p.
7. **Prossdorf, S.** Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations / S. Prossdorf, B. Silbermann. – Berlin : Acad. Verl., 1991. – 544 p.
8. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М. : Янус-К., 2001. – 508 с.
9. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2004. – 316 с.
10. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // International Conference on Computational Mathematics. – Part first. Novosibirsk. – 2004. – P. 411–417.
11. **Бойков, И. В.** Коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2006. – № 5. – С. 42–50. – (Естественные науки).
12. **Бойков, И. В.** Сплайн-коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Вестник Харк. нац. ун-та. – 2007. – № 775. – Вып. 7. – С. 36–49. – (Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления).
13. **Бойков, И. В.** Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрических вибраторов / И. В. Бойков, Д. В. Тарасов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2008. – № 4. – С. 94–106.
14. **Boykov, I. V.** An approximate solution of hypersingular integral equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2010. – № 60. – P. 607–628.
15. **Сизиков, В. С.** Численное решение сингулярного интегрального уравнения / В. С. Сизиков, А. В. Смирнов, Б. А. Федоров // Известия вузов. Математика. – 2004. – Т. 8. – С. 62–70.
16. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
17. **Чикин, Л. А.** Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Ученые записки Казанского гос. ун-та. – 1953. – Т. 113. – № 10. – С. 57–105.
18. **Boykov, I. V.** Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – V. 59. – № 6. – P. 1366–1385.
19. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1963. – 640 с.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

Бойкова Алла Ильинична
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykova Alla Ilyinichna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

УДК 517.392

Бойков, И. В.

Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений с целыми сингулярностями нечетного порядка / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 15–27.